

# Etude théorique et expérimentale des échangeurs en régime thermique instationnaire. Simulation d'une phase de relaxation

P. PIERSON et J. PADET

Laboratoire de Thermomécanique, Faculté des Sciences de Reims, BP 347,  
51062 Reims Cédex, France

(Reçu le 21 Mai 1987 et sous forme finale le 2 Novembre 1987)

**Résumé**—Afin de simuler une phase de relaxation d'un échangeur thermique, un modèle simple, basé sur des considérations expérimentales, est proposé. Ce modèle, très bien vérifié par l'expérience, consiste à décomposer la réponse en un palier de durée  $t_r$  (temps de retard), suivi d'une variation exponentielle, caractérisée par une seule constante de temps  $\tau$ . Un bilan thermique de chaque élément permet d'exprimer  $\tau$  sous une forme analytique simple, en fonction des caractéristiques géométriques de l'échangeur et des conditions de fonctionnement. L'expression obtenue est recalée sur l'expérience (cas d'un échangeur bi-tube) et sur les résultats obtenus par d'autres auteurs.

## 1. INTRODUCTION

QUELLE QUE soit son utilisation, un échangeur thermique ne peut fonctionner constamment en régime permanent. Des phases transitoires interviennent notamment pendant les périodes de mise en route ou d'arrêt du système (centrales thermiques par exemple); des régimes variés sont à considérer dès lors qu'un débit ou une température d'entrée d'un fluide varie au cours du temps (systèmes régulés).

Les modèles théoriques couramment utilisés pour simuler le fonctionnement d'un échangeur thermique en régime variable sont des modèles analogiques [1] ou numériques [2, 3]. Ces modèles nécessitent donc l'usage de calculateurs assez puissants et font toujours appel à la notion de coefficient d'échange  $h$  par convection entre fluide et paroi: ce sont des modèles 'quasi-stationnaires'.

Or, certains auteurs [4, 5] ont montré les dangers de généraliser ces modèles à tous les cas de fonctionnement en raison des fluctuations importantes du coefficient  $h$  au cours du temps. Il serait donc intéressant de s'affranchir de ces coefficients  $h$  dans les bilans thermiques effectués en régime variable.

Nous proposons ici une approche théorique différente permettant dans un premier temps de simuler une phase de relaxation d'un échangeur (réponse à une brusque variation de la température d'entrée de l'un des fluides).

La méthode proposée est basée sur l'observation expérimentale qui fait l'objet du premier paragraphe. Celui-ci est suivi d'une analyse théorique; une application est ensuite envisagée dans le cas d'un échangeur bi-tube pour lequel les résultats théoriques sont confrontés à l'expérience et à ceux d'autres auteurs.

## 2. ETUDE EXPERIMENTALE D'UNE PHASE DE RELAXATION D'UN ECHANGEUR

Nous avons soumis l'échangeur bi-tube eau-eau de la Fig. 1 et fonctionnant à des températures inférieures à 80°C à une brusque variation de la température d'entrée  $\hat{T}_{C_e}$  du fluide C et nous avons enregistré la réponse correspondante  $\hat{T}_{F_s}(t)$  (température de sortie du fluide F), alors que la température  $\hat{T}_{F_e}$  (entrée fluide F) et les débits  $q_{mC}$  et  $q_{mF}$  étaient constants.

Sur les Figs. 2 et 3 est représentée la loi de variation:

$$Y(t) = \ln |\hat{T}_{F_s}(t) - \hat{T}_{F_s}(\infty)|$$

(le symbole  $\infty$  correspond à l'instant où le régime permanent final est considéré atteint) dans deux cas: l'écoulement co-courant (Fig. 2) et l'écoulement contre-courant (Fig. 3).

On observe que  $Y(t)$  est d'abord une constante, puis qu'après un temps de retard  $t_r$ , elle peut s'approcher sans grande erreur à l'aide d'une loi linéaire qui conduit à l'écriture suivante:

$$t \leq t_r : \hat{T}_{F_s}(t) = \hat{T}_{F_s}(0) = \text{cte}$$

$$t \geq t_r : \hat{T}_{F_s}(t) = \hat{T}_{F_s}(\infty)$$

$$+ (\hat{T}_{F_s}(0) - \hat{T}_{F_s}(\infty)) \exp\left(-\frac{t-t_r}{\tau}\right). \quad (1)$$

La constante de temps  $\tau$  qui intervient dans (1) n'est pas la constante de temps fondamentale habituellement définie pour caractériser une loi de réponse à une seule exponentielle après un temps de fonctionnement  $t_1$ . En toute rigueur, pour  $t < t_1$ ,  $\hat{T}_{F_s}(t)$  devrait s'exprimer sous forme d'une somme d'exponentielles. La loi (1) n'est donc qu'une approximation qui s'est avérée suffisante pour simuler avec une bonne précision la réponse dynamique des échangeurs 'basse

## NOMENCLATURE

$A$	surface qui de limite [m <sup>2</sup> ]	$U_d$	vitesse de débit [m s <sup>-1</sup> ]
$A_d$	section droite [m <sup>2</sup> ]	$V$	volume [m <sup>3</sup> ]
$C$	capacité calorifique [J K <sup>-1</sup> ]	$x$	coordonnée longitudinale de l'échangeur.
$C_p$	chaleur massique [J K <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup> ]	<i>Lettres grecques</i>	
$e$	énergie calorifique unitaire [J kg <sup>-1</sup> ]	$\lambda$	conductivité thermique [W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$E$	efficacité de l'échangeur	$\rho$	masse volumique [kg m <sup>-3</sup> ]
$h$	coefficient local d'échange par convection [W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ]	$\Sigma$	surface d'échange [m <sup>2</sup> ]
$K$	coefficient global d'échange de l'échangeur [W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ]	$\tau$	constante de temps [s]
$L$	longueur de l'échangeur [m]	$\varphi$	densité de flux [W m <sup>-2</sup> ]
$NUT$	nombre d'unités de transfert de l'échangeur	$\phi$	flux échangé [W].
$P_e$	puissance totale échangée entre un fluide et une paroi de l'échangeur [W]	<i>Indices</i>	
$q_m$	débit massique [kg s <sup>-1</sup> ]	$a$	paroi extérieure de l'échangeur
$q_t$	débit thermique unitaire [W K <sup>-1</sup> ]	$C$	fluide chaud
$r$	coordonnée radiale de l'échangeur	$e$	entrée
$T$	température [°C]	$F$	fluide froid
$T_m$	température de mélange [°C]	$i$	paroi intermédiaire de l'échangeur
$t$	temps [s]	$s$	sortie
$t_r$	temps de retard [s]	$-$	indique une quantité moyenne sur l'ensemble de l'échangeur
$U$	vitesse [m s <sup>-1</sup> ]	$\wedge$	indique une température moyenne géométrique.

température' (<80°C; vérifié pour des échangeurs bi-tubes, tubulaires, à plaques). Une étude complémentaire [6] a montré que (1) peut également s'appliquer à la réponse de capteurs solaires 'basse température' à un échelon d'ensoleillement (le capteur solaire représentant un cas particulier d'échangeur). Balbi *et al.* [7] ont montré par ailleurs que pour des installations héliothermiques à concentration qui fonctionnent entre 150 et 300°C, il est nécessaire d'utiliser deux constantes de temps; une somme de deux exponentielles s'avère alors indispensable pour caractériser la réponse de tels systèmes.

De même, dans un échangeur où l'un des fluides circule par convection naturelle, l'approximation (1) n'est généralement pas applicable [8].

On observe également que la notion de temps de retard  $t_r$  est justifiée dans le cas de l'écoulement contre-courant (cf. Fig. 2):  $t_r$  est alors à rapprocher du temps

de parcours du fluide C dans l'échangeur. Par contre, en écoulement contre-courant, la réponse est enregistrée au niveau de la section droite (sortie fluide F) où est réalisé l'échelon de température  $\hat{T}_{Ce}$  (entrée fluide C):  $t_r$  (cf. Fig. 3) n'a alors plus de signification physique claire; il correspond simplement au temps nécessaire à l'établissement d'une loi  $Y(t)$  linéaire aux incertitudes près.

Cependant, au cours de tous nos essais, l'approximation (1) a donné de très bons résultats et a également pu être étendue à d'autres types d'échangeurs. De plus, elle a permis de simplifier considérablement l'étude théorique qui suit.

### 3. ETUDE THEORIQUE D'UNE PHASE DE RELAXATION D'UN ECHANGEUR

Les hypothèses suivantes ont été considérées (Fig. 1).

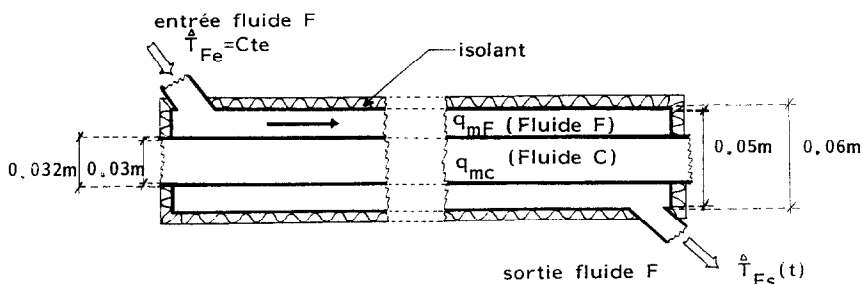


FIG. 1. Coupe longitudinale de l'échangeur bi-tube expérimental.

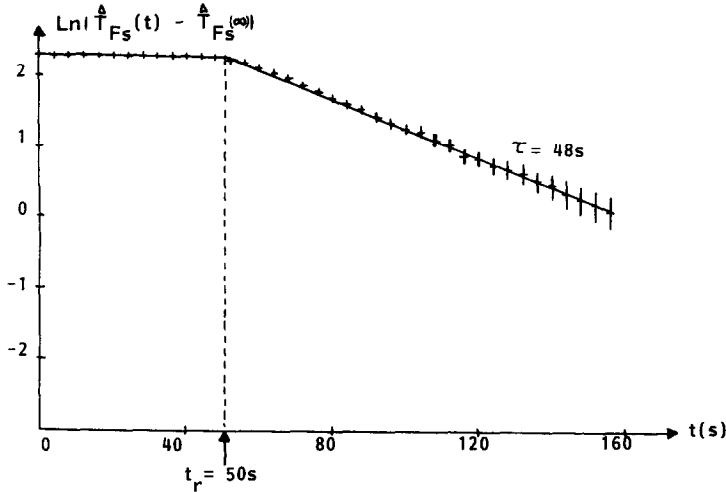


FIG. 2. Variation au cours du temps de la quantité  $\ln |T_{Fs}(t) - T_{Fs}(\infty)|$  dans les conditions suivantes :  $q_{mC} = 2.92 \times 10^{-2} \text{ kg s}^{-1}$ ,  $q_{mF} = 3.00 \times 10^{-2} \text{ kg s}^{-1}$ , fluides en co-courant.

(a) L'échangeur est parfaitement isolé vis à vis du milieu ambiant.

(b) Les fluides C et F sont des liquides qui se déplacent suivant  $x$ , à débit constant. On notera  $q_{cC}$  et  $q_{cF}$  les débits thermiques unitaires respectifs de ces liquides.

(c) On suppose que l'approximation (1) concernant la loi de réponse de l'échangeur à un échelon de température est vérifiée avec la même constante de temps en tout point du système. Cette hypothèse est évidemment simplificatrice, au même titre que la loi (1); elle a été vérifiée sur nos échangeurs [5] mais ne peut être étendue à tous les cas (notamment aux installations qui fonctionnent à température élevée).

(d) On considère que le régime d'écoulement des fluides est établi, laminaire ou turbulent. Cette condition est évidemment irréalisable sur l'ensemble du système, mais elle peut être remplie sur une grande

partie de l'échangeur si celui-ci est assez long. De plus, les résultats expérimentaux (cf. §4) montrent qu'une telle hypothèse conduit à des valeurs théoriques de  $\tau$  tout à fait raisonnables, même en écoulement laminaire.

(e) La température d'entrée  $\hat{T}_{Fe}$  du fluide F est constante. La phase de relaxation est étudiée lors d'une variation de type échelon de la température  $\hat{T}_{Ce}$  (cf. Fig. 4).

(f) Les termes de frottement sont négligés.

(g) Les caractéristiques thermophysiques des liquides sont supposées constantes pendant la phase de relaxation.

(h) La conduction suivant  $x$  dans les liquides et les parois n'est pas prise en compte.

A partir de ces hypothèses, nous avons pu établir le bilan thermique des quatre éléments du système : les fluides C et F, les parois i et a.

3.1. Application de l'équation de l'énergie au fluide C

L'équation de l'énergie appliquée à l'ensemble du fluide C contenu dans l'échangeur (volume  $V_C$  sans source de chaleur interne) s'écrit :

$$\int_{V_C} \frac{\partial(\rho_C \cdot e_C)}{\partial t} dV_C + \int_{A_C} \rho_C e_C U_C \cdot n dA_C = - \int_{A_C} \varphi \cdot n dA_C \quad (2)$$

où  $e_C$  représente l'énergie calorifique de C au point

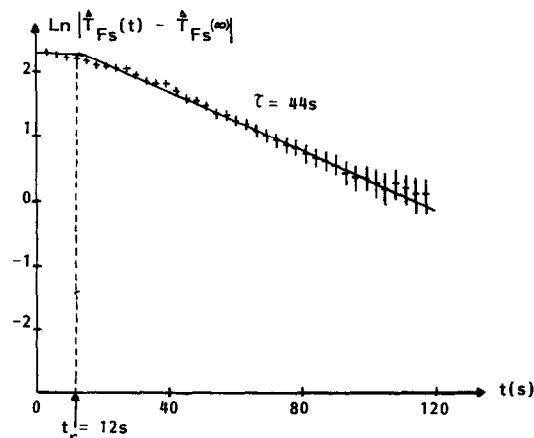


FIG. 3. Variation au cours du temps de la quantité  $\ln |T_{Fs}(t) - T_{Fs}(\infty)|$  dans les conditions suivantes :  $q_{mC} = 5.28 \times 10^{-2} \text{ kg s}^{-1}$ ,  $q_{mF} = 5.83 \times 10^{-2} \text{ kg s}^{-1}$ , fluides en contre-courant.

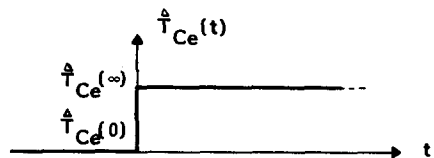


FIG. 4. Représentation de l'échelon  $T_{Ce}(t)$ .

considéré,  $\rho_C$  sa masse volumique,  $U_C$  sa vitesse et  $\phi$  la densité de flux de chaleur échangée à travers  $dA_C$  (de normale  $\mathbf{n}$ ).

(a) Le développement de la première intégrale  $I_1$  de l'équation (2) conduit à écrire :

$$I_1 = \int_{V_C} \frac{\partial(\rho_C \cdot e_C)}{\partial t} dV_C = C_C \frac{\partial \bar{T}_C}{\partial t}$$

avec

$$\bar{T}_C = \frac{1}{V_C} \int_L \left\{ \int_{A_{dc}} T_C(r) dA_{dc} \right\} dx$$

= température moyenne de C le long de l'échangeur à l'instant  $t$

$$C_C = \rho_C C_{pC} V_C$$

= capacité calorifique de C dans l'échangeur. (3)

(b) Si l'on appelle  $A_{de}$  et  $A_{ds}$  respectivement les sections d'entrée et de sortie de l'échangeur, le développement de la deuxième intégrale  $I_2$  de (2) donne :

$$I_2 = \int_{A_C} \rho_C e_C U_C \mathbf{n} dA_C = \rho_C \left\{ \int_{A_{ds}} e_C U_C dA_{ds} - \int_{A_{de}} e_C U_C dA_{de} \right\}$$

puisque  $U_C$  n'a pas, par hypothèse, de composante suivant  $r$ . Nous voyons apparaître dans  $I_2$  la notion de température de mélange :

$$T_{mC} = \frac{1}{U_{dC} A_{dC}} \int_{A_{dC}} T_C(r) U_C(r) dA_{dC}$$

avec

$$U_{dC} = q_{iC} / (\rho_C C_{pC} A_{dC}) = \text{vitesse de débit.}$$

Pour conserver la même notion de température moyenne que dans l'équation (3), il faudrait pouvoir écrire les égalités :

$$T_{mCs} = \hat{T}_{Cs} = \frac{1}{A_{dCs}} \int_{A_{dCs}} T_C(r) dA_{dCs}$$

$$T_{mCe} = \hat{T}_{Ce} = \frac{1}{A_{dCe}} \int_{A_{dCe}} T_C(r) dA_{dCe} \quad (4)$$

( $\hat{T}_{Cs}$  et  $\hat{T}_{Ce}$  étant des températures moyennes géométriques sur la section droite considérée du fluide C). (4) n'est vérifiée en première approximation que si le profil des vitesses est suffisamment plat à l'entrée et à la sortie de l'échangeur ; ce qui est envisageable à condition d'imposer une turbulence locale au niveau de ces deux sections.

C'est pourquoi un rétrécissement brusque des sections d'entrée et de sortie de l'échangeur a été réalisé et a permis de mesurer les températures moyennes de ces sections (définies par (4)) même en écoulement laminaire. On considérera bien sûr que cette modi-

fication très locale du régime d'écoulement ne perturbe pas (ou très peu) les échanges thermiques dans l'échangeur supposé suffisamment long.

$I_2$  peut alors s'écrire sous cette condition :

$$I_2 = \rho_C U_{dC} C_{pC} A_{dC} (\hat{T}_{Cs} - \hat{T}_{Ce}) = q_{iC} (\hat{T}_{Cs} - \hat{T}_{Ce}) \quad (4')$$

(c) L'intégrale

$$I_3 = \int_{A_C} \phi \cdot \mathbf{n} dA_C$$

représente le flux total échangé entre le fluide C et la paroi  $i$  du tube que nous noterons  $\phi_C$ .

(d) A l'aide des résultats précédents, (2) s'écrit :

$$C_C \frac{\partial \bar{T}_C}{\partial t} + q_{iC} (\hat{T}_{Cs} - \hat{T}_{Ce}) = -\phi_C. \quad (5)$$

### 3.2. Bilan thermique des divers constituants de l'échangeur

En appliquant le même raisonnement qu'au paragraphe précédent au fluide F et aux parois  $i$  et  $a$  (pour lesquelles le terme de transport disparaît), on obtient le système d'équations différentielles :

$$C_C \frac{\partial \bar{T}_C}{\partial t} + q_{iC} (\hat{T}_{Cs} - \hat{T}_{Ce}) = -\phi_C$$

$$C_F \frac{\partial \bar{T}_F}{\partial t} + q_{iF} (\hat{T}_{Fs} - \hat{T}_{Fe}) = -\phi_F - \phi_a$$

$$C_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial t} = \phi_C + \phi_F$$

$$C_a \frac{\partial \bar{T}_a}{\partial t} = \phi_a$$

qui peut s'écrire en additionnant membre à membre les équations :

$$C \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + q_{iC} (\hat{T}_{Cs} - \hat{T}_{Ce}) + q_{iF} (\hat{T}_{Fs} - \hat{T}_{Fe}) = 0$$

avec

$$\bar{T} = \frac{1}{C} (C_C \bar{T}_C + C_F \bar{T}_F + C_i \bar{T}_i + C_a \bar{T}_a)$$

$$C = C_C + C_F + C_i + C_a. \quad (6)$$

### 3.3. Calcul de la constante de temps $\tau$

Si pour  $t \geq t_r$ , nous appliquons maintenant la loi exponentielle (1) aux températures  $\bar{T}(t)$ ,  $T_{Cs}$  et  $T_{Fs}$  en considérant une constante de temps unique pour l'ensemble de l'échangeur, nous pouvons écrire, par combinaison des trois équations obtenues :

$$\hat{T}_{Cs}(t) = \hat{T}_{Cs}(\infty) + H_C (\bar{T}(t) - \bar{T}(\infty))$$

avec

$$H_C = \frac{\hat{T}_{Cs}(0) - \hat{T}_{Cs}(\infty)}{\bar{T}(0) - \bar{T}(\infty)}$$

$$\hat{T}_{Fs}(t) = \hat{T}_{Fs}(\infty) + H_F (\bar{T}(t) - \bar{T}(\infty))$$

avec

$$H_F = \frac{\hat{T}_{Fs}(0) - \hat{T}_{Fs}(\infty)}{\bar{T}(0) - \bar{T}(\infty)} \quad (7)$$

En combinant (6) et (7), on obtient :

$$C \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + C' \bar{T} = C'' \quad (8)$$

avec

$$C' = q_{iC} H_C + q_{iF} H_F$$

$$C'' = \bar{T}(\infty) C' \text{ (cas du signal échelon).}$$

Pour exprimer  $\bar{T}$  sous la forme (1),  $\bar{T}$  doit être aussi solution de l'équation différentielle :

$$\tau \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{T} = \bar{T}(\infty) \quad (9)$$

Par identification de (8) et (9), on en déduit l'expression (10) de  $\tau$  :

$$\tau = \frac{C}{C'} = \frac{C_C + C_F + C_i + C_a}{q_{iC} H_C + q_{iF} H_F} \quad (10)$$

où les quantités  $H_C$  et  $H_F$  sont données par (7) et sont uniquement fonction des caractéristiques de fonctionnement de l'échangeur pendant les régimes initial et final.

#### 4. APPLICATION DE LA METHODE A UN ECHANGEUR BI-TUBE

##### 4.1. Calcul de $\tau$ dans le cas d'un échangeur bi-tube

Nous avons noté tant sur le plan théorique qu'expérimental que, pour les mêmes conditions de fonctionnement, les valeurs de  $\tau$  sont très peu différentes suivant que les écoulements sont co- ou contre-courant. C'est pourquoi les résultats qui suivent concernant  $\tau$  seront applicables quelque soit le sens d'écoulement des fluides. Il reste donc à distinguer les écoulements laminaires et les écoulements turbulents.

4.1.1. *Cas de l'écoulement turbulent pour les fluides C et F.* Une analyse classique [9, 10] des puissances échangées en régime permanent entre les fluides C et F permet d'exprimer les températures moyennes  $\hat{T}_F(x)$  et  $\hat{T}_C(x)$  en fonction des températures d'entrée  $\hat{T}_{Ce}$  et  $\hat{T}_{Fe}$  sous la forme (11) :

$$\hat{T}_F(x) = \frac{1}{(q_{iF}/q_{iC}) + 1} \left[ \hat{T}_{Ce} + \frac{q_{iF}}{q_{iC}} \hat{T}_{Fe} - (\hat{T}_{Ce} - \hat{T}_{Fe}) \exp \left\{ -K \Sigma(x) \left( \frac{1}{q_{iC}} + \frac{1}{q_{iF}} \right) \right\} \right]$$

$$\hat{T}_C(x) = \frac{1}{(q_{iF}/q_{iC}) + 1} \left[ \hat{T}_{Ce} + \frac{q_{iF}}{q_{iC}} \hat{T}_{Fe} + \frac{q_{iF}}{q_{iC}} (\hat{T}_{Ce} - \hat{T}_{Fe}) \exp \left\{ -K \Sigma(x) \left( \frac{1}{q_{iC}} + \frac{1}{q_{iF}} \right) \right\} \right] \quad (11)$$

(11) concerne les écoulements co-courant ; des équations du même type seraient obtenues en contre-courant).

Pour un écoulement quelconque, le coefficient global d'échange  $K$  qui intervient dans (11) doit être défini sous la forme :

$$1/K = 1/\bar{h}_{Ci} + 1/\bar{h}_{iF} \quad (11')$$

(où l'on a négligé la résistance thermique du tube intérieur supposé mince et bon conducteur).

Dans (11'),  $\bar{h}_{Ci}$  et  $\bar{h}_{iF}$  doivent être définis à partir des températures moyennes  $\bar{T}$ . Cependant, dans le cas particulier de l'écoulement turbulent considéré ici, on pourra utiliser les formules usuelles de corrélation (Colburn [9]) par identification de la température de mélange et de la température moyenne géométrique.

D'où les expressions des températures moyennes  $\bar{T}_F$  et  $\bar{T}_C$  :

$$\bar{T}_F = \frac{1}{L} \int_L \hat{T}_F(x) dx = \frac{1}{(q_{iF}/q_{iC}) + 1} \times \left[ \hat{T}_{Ce} + \frac{q_{iF}}{q_{iC}} \hat{T}_{Fe} - \frac{E}{NUT} (\hat{T}_{Ce} - \hat{T}_{Fe}) \right]$$

$$\bar{T}_C = \frac{1}{L} \int_L \hat{T}_C(x) dx = \frac{1}{(q_{iF}/q_{iC}) + 1} \times \left[ \hat{T}_{Ce} + \frac{q_{iF}}{q_{iC}} \hat{T}_{Fe} + \frac{q_{iF}}{q_{iC}} \frac{E}{NUT} (\hat{T}_{Ce} - \hat{T}_{Fe}) \right] \quad (12)$$

où l'on a introduit l'efficacité  $E$  et le nombre d'unités de transfert  $NUT$  de l'échangeur.

En régime permanent, si l'on suppose que la paroi externe 'a' est mince et bonne conductrice, que le profil de température  $T_F(r)$  est plat et que l'échangeur est parfaitement isolé de l'ambiance, on peut admettre l'égalité (13) :

$$\bar{T}_a = \bar{T}_F \quad (13)$$

D'autre part, à l'aide des mêmes hypothèses et en écrivant la continuité du flux de part et d'autre de la paroi i, on a :

$$\bar{T}_i = \frac{\bar{h}_{iF}}{\bar{h}_{iF} + \bar{h}_{Ci}} \bar{T}_F + \frac{\bar{h}_{Ci}}{\bar{h}_{iF} + \bar{h}_{Ci}} \bar{T}_C \quad (14)$$

Les relations (12)–(14) permettent le calcul en régime permanent de la température moyenne définie en (6) :

$$\bar{T} = \frac{1}{(q_{iF}/q_{iC}) + 1} \left[ \hat{T}_{Ce} + \frac{q_{iF}}{q_{iC}} \hat{T}_{Fe} + F (\hat{T}_{Ce} - \hat{T}_{Fe}) \right]$$

avec

$$F = \frac{1}{C} \frac{E}{NUT} \left[ \frac{q_{iF}}{q_{iC}} C_C - (C_F + C_a) + \frac{(q_{iF}/q_{iC}) - (\bar{h}_{iF}/\bar{h}_{Ci})}{1 + (\bar{h}_{iF}/\bar{h}_{Ci})} C_i \right] \quad (15)$$

En exprimant également  $\hat{T}_{Cs} = \hat{T}_C(x=L)$  et  $\hat{T}_{Fs} = \hat{T}_F(x=L)$  en fonction de  $\hat{T}_{Cc}$  et  $\hat{T}_{Fc}$  à partir de (11), on peut en déduire les quantités  $H_C$  et  $H_F$ :

$$H_C = \frac{1 + (q_{iF}/q_{iC})[1 - E(1+R)]}{1+F}$$

et

$$H_F = \frac{E(1+R)}{1+F}$$

avec

$$R = q_{\min}/q_{\max} \quad (16)$$

(10) s'écrit alors à l'aide de (16):

$$\tau = \frac{C(1+F)}{q_{iC} + q_{iF}} \quad (17)$$

4.1.2. *Cas de l'écoulement laminaire pour les fluides C et F.* Dans ce cas, les températures  $\bar{T}_C$  et  $\bar{T}_F$  peuvent toujours s'exprimer en régime permanent sous la forme (12). Par contre, pour le calcul de  $\bar{T}_a$ , il faut prendre en compte le profil des températures  $T_i(r)$  (cf. Fig. 5).

Pour alléger le développement théorique, nous proposons de raisonner, toujours en régime permanent, sur un système équivalent  $\{Se\}$  à l'ensemble  $\{\text{paroi } a, \text{ fluide } F, \text{ paroi } i\}$ , tel que:

(a) Le flux à la paroi a est nul (échangeur parfaitement isolé).

(b) Le flux à la paroi i est constant et égal à  $\bar{\phi} = \phi/\Sigma$  où  $\phi$  représente la puissance totale échangée le long de l'échangeur réel et  $\Sigma$  la surface d'échange totale entre les deux fluides.

(c) Les températures moyennes  $\bar{T}_F$ ,  $\bar{T}_a$  et  $\bar{T}_i$  sont les mêmes que dans le système étudié.

Dans le système  $\{Se\}$ , on sait déterminer de façon analytique simple le profil des températures  $T_F(r)$  à partir du profil des vitesses  $U_F(r)$ . Bien entendu, le profil  $T_F(r)$  ainsi obtenu n'est certainement qu'une première approximation du profil réel, d'autant plus que dans ce cas, la longueur d'établissement du régime d'écoulement devient importante. Nous verrons cependant (paragraphe 4.2) que les valeurs de  $\tau$  ainsi obtenues sont tout à fait acceptables.

Les calculs développés en annexe donnent:

$$\bar{T}_F = \bar{T}_i + G_3(\bar{T}_a - \bar{T}_i)$$

ou encore

$$\bar{T}_a = \frac{1}{G_3} \bar{T}_F + \left(1 - \frac{1}{G_3}\right) \bar{T}_i \quad (18)$$

où  $G_3$  est donné par (A4) et où  $\bar{T}_i$  reste de la forme (14).

Cependant, dans ce cas, pour exprimer les coefficients d'échange  $\bar{h}_{Ci}$  et  $\bar{h}_{iF}$ , il est impossible d'utiliser les corrélations usuelles, généralement définies à partir de la température de mélange dans le fluide. Un calcul de  $\bar{h}_{iF}$  et  $\bar{h}_{Ci}$  doit donc être effectué dans le système équivalent  $\{Se\} \equiv \{a, F, i\}$  pour  $\bar{h}_{iF}$  (voir expression (A5)) et dans le système  $\{S_c\} \equiv \{C, i\}$  pour  $\bar{h}_{Ci}$  (voir expression (A6)).

À l'aide de (11), (12), (14), (18)  $H_C$  et  $H_F$  s'expriment sous la forme (19):

$$H_C = \frac{1 + (q_{iF}/q_{iC})[1 - E(1+R)]}{1+F'}$$

et

$$H_F = \frac{E(1+R)}{1+F'}$$

avec

$$F' = \frac{1}{C} \frac{E}{NUT} \left( \frac{q_{iF}}{q_{iC}} C_C - C_F + \Delta C_i \right) - \left\{ \frac{1}{G_3} - \Delta \left(1 - \frac{1}{G_3}\right) \right\} C_a$$

$$\Delta = \frac{(q_{iF}/q_{iC}) - (\bar{h}_{iF}/\bar{h}_{Ci})}{1 + (\bar{h}_{iF}/\bar{h}_{Ci})} \quad (19)$$

D'où l'on tire l'expression (20) de  $\tau$ :

$$\tau = \frac{C(1+F')}{q_{iC} + q_{iF}}$$

*Remarque.* Dans le cas où l'écoulement est laminaire pour C et turbulent pour F,  $\tau$  est donnée par (17) à condition de définir  $\bar{h}_{Ci}$  par (A6) et  $\bar{h}_{iF}$  par une

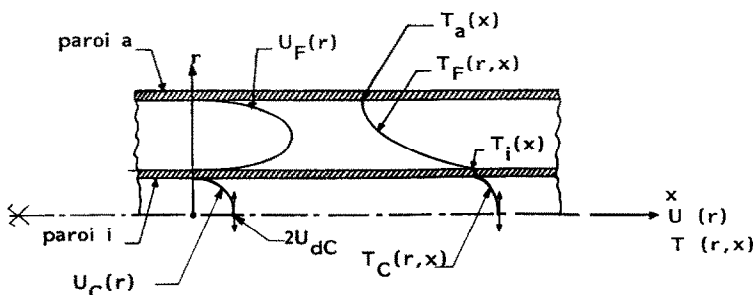


FIG. 5. Profil des vitesses et des températures sur une section de l'échangeur.

relation classique de régime turbulent. Si l'écoulement est laminaire pour F et turbulent pour C,  $\tau$  est donnée par (20) où  $h_{iF}$  est défini par (A5) et  $h_{cI}$  par une relation classique de régime turbulent.

4.2. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

Sur le tableau 1 sont répertoriés 8 essais réalisés sur l'échangeur de la Fig. 1 où l'on imposait un échelon d'amplitude variable sur la température  $T_{Ce}$ . Les valeurs théoriques de  $\tau$  ont été tirées de la relation (20) alors que les valeurs expérimentales ont été déterminées à partir de la pente de la droite  $\ln|T_{Fs}(t) - T_{Fs}(\infty)|$ .

On observe que les écarts ne dépassent pas 10% et sont compatibles avec les incertitudes de calcul et les erreurs expérimentales. On notera cependant que les essais ont été réalisés le plus souvent avec des écoulements laminaires. Il était en effet important de caler le modèle dans ce cas particulier en raison des problèmes spécifiques qu'il pose: difficulté d'établissement du régime, difficulté d'approcher précisément le profil des températures sur une section. En attendant une étude expérimentale complémentaire en régime turbulent, nous avons comparé nos résultats à ceux de Haddad [3] sur le même type d'échangeur.

4.3. Comparaison de nos résultats avec ceux de Haddad [3]

Sur l'échangeur contre-courant de la Fig. 6 où la paroi extérieure n'est pas prise en compte, Haddad étudie la réponse à une brusque variation de la température  $T_{Ce}$ . Une modélisation par calcul numérique donne les résultats de la Fig. 7 où l'on observe que la loi  $\ln|T_{Fs}(\infty) - T_{Fs}(t)|$  peut être approchée à l'aide d'une droite pour  $t > 2$  s. On retrouve donc certains résultats du paragraphe 1 et l'on peut en déduire une constante de temps  $\tau = 6.2$  s qui est égale à 2 s près à la valeur déduite de l'expression (17) :  $\tau = 8.2$  s. On note que l'évolution de la quantité  $(T_{Fs}(t) - T_{Fs}(0))$  au cours du temps établie à partir de la loi exponentielle (1) où  $\tau = 8.2$  s, est très voisine de la simulation de Haddad, tout en étant bien plus simple à obtenir (cf. Fig. 7).

4.4. Comparaison de nos résultats avec ceux de Gilles [1]

Gilles a réalisé le même type d'étude que Haddad sur l'échangeur de la Fig. 8, en utilisant un modèle analogique. Il s'est également intéressé à l'influence du débit  $q_{mF}$  du fluide F sur la constante de temps  $\tau$ .

Les résultats obtenus sont donnés sur la Fig. 9 et sont comparés à ceux déduits des relations (17) et (20).

En extrapolant la courbe de Gilles, on note que les deux méthodes conduisent à des résultats très proches en écoulement laminaire et turbulent. Les écarts obtenus pour un écoulement de transition ne sont pas significatifs puisqu'il est impossible d'effectuer un calcul théorique précis dans ce cas.

Table 1. Récapitulation des essais et résultats obtenus

Type d'écoulement	Numéro de l'essai							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Débit fluide C ( $m^3 s^{-1}$ )	$2.92 \times 10^{-5}$	$6.92 \times 10^{-5}$	$8.33 \times 10^{-5}$	$22.36 \times 10^{-5}$	$5.28 \times 10^{-5}$	$6.39 \times 10^{-5}$	$9.44 \times 10^{-5}$	$8.61 \times 10^{-5}$
$Re_{max}$ (fluide C)	1876	4697	5908	11660	1858	4220	6353	4403
Débit fluide F ( $m^3 s^{-1}$ )	$3.00 \times 10^{-5}$	$7.47 \times 10^{-5}$	$6.94 \times 10^{-5}$	$8.33 \times 10^{-5}$	$5.83 \times 10^{-5}$	$12.36 \times 10^{-5}$	$4.50 \times 10^{-5}$	$8.33 \times 10^{-5}$
$Re_{max}$ (fluide F)	414	999	947	1064	972	1568	603	1006
Echelon sur $T_{Ce}$ ( $^{\circ}C$ )	13.1-53.0	12.6-57.0	13.0-59.0	11.3-36.2	56.1-12.8	11.6-55.2	11.3-53.9	9.3-36.8
$T_{Fs}$ ( $^{\circ}C$ )	13.1	12.6	13.0	11.3	12.8	11.6	11.3	9.3
$\tau_{théorique}$ (s)	53	23	23	10	40	21	33	26
$\tau_{expérimental}$ (s)	48	22	25	11	44	20	34	27
écart (théorie-expérience (%))	9.4	4.3	8.7	10	10	4.8	3.0	3.8

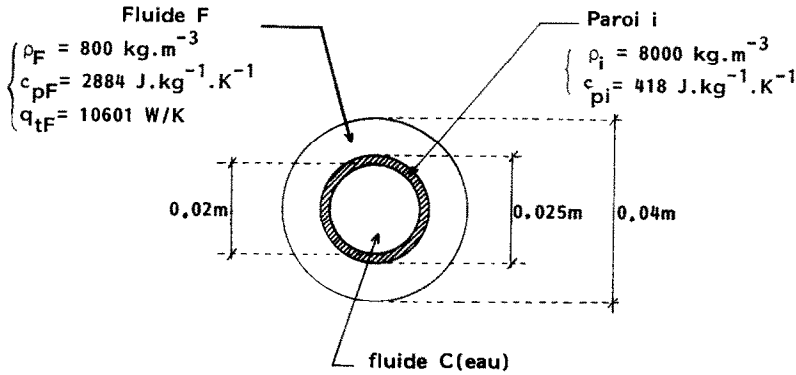


FIG. 6. Coupe de l'échangeur étudié par Haddad (longueur : 18 m).

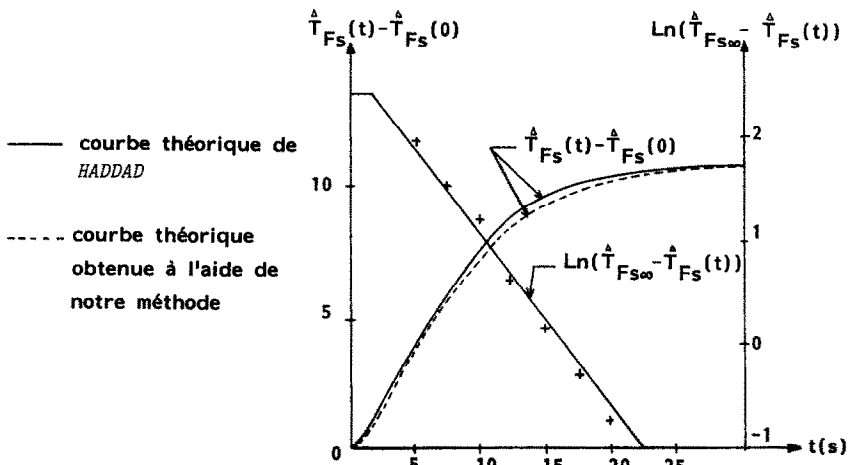


FIG. 7. Réponse  $T_{Fs}(t)$  de l'échangeur de Haddad à un échelon sur  $T_{Ce}$ .

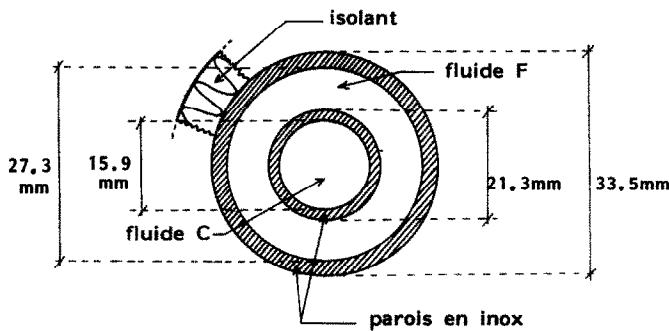


FIG. 8. Coupe de l'échangeur étudié par Gilles (longueur : 6 m).

**5. CONCLUSION**

La méthode proposée permet donc de simuler à l'aide d'une loi très simple (1) la réaction d'un échangeur à une brusque variation de la température d'entrée de l'un des fluides.

Dans cette loi, intervient la constante de temps  $\tau$ , caractéristique de la réponse. Une expression analy-

tique de  $\tau$  est proposée (17) et (20), qui conduit à des résultats tout à fait convenables une fois confrontés à l'expérience ou à ceux d'autres auteurs. Il est à noter que les expressions (17) et (20) donnent  $\tau$  en fonction des caractéristiques géométriques et thermiques de l'échangeur et des fluides qui y circulent. On ne fait plus intervenir de coefficient moyen d'échange par convection pendant la phase transitoire. Seuls sont



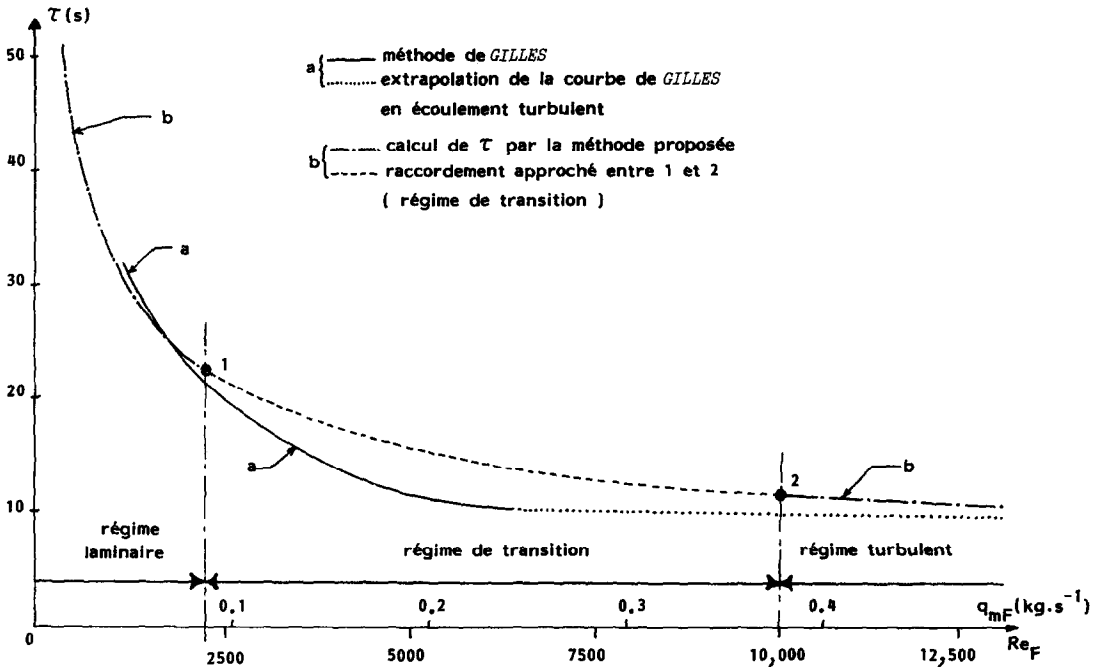


FIG. 9. Variation de la constante de temps  $\tau$  en fonction du débit  $q_{mF}$ .

pris en compte les coefficients  $\bar{h}$  caractéristiques des transferts thermiques pendant les régimes permanents initial et final.

La constante de temps  $\tau$  pourra donc représenter une grandeur calculable, caractéristique du système étudié, lorsqu'il fonctionne en régime transitoire.

Un prolongement de ce travail est en cours dans le cadre d'un contrat avec l'Agence Française pour la Maitrise de l'Energie pour des échangeurs à gaz et des échangeurs soumis à une variation du débit de l'un des fluides.

Remerciements—Etude financée par l'Agence Française pour la Maitrise de l'Energie.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. G. Gilles, Elaboration du modèle mathématique et commande optimale par calculateur analogique d'un échangeur thermique pilote, Thèse d'Etat, Université de Grenoble (1971).
2. S. V. Patankar and D. B. Spalding, A calculation procedure for the transient and steady state behaviour of shell and tube heat exchangers. *Heat Exchangers* (Edited by Afgan and Schlinder), pp. 155-175. McGraw-Hill, New York (1974).
3. M. T. Haddad, Régime dynamique des échangeurs de chaleur, *Revue Gén. Thermique* 34, 1251-1269 et 1431-1440 (1964).
4. E. M. Sparrow and F. N. De Farias, Unsteady heat transfer in ducts with time varying inlet temperature and participating walls, *Int. J Heat Mass Transfer* 11, 837-853 (1968).
5. P. Pierson et J. Padet, L'évaluation des transferts thermoconvectifs en régime instationnaire, approche

théorique et expérimentale, *Revue Gén. Thermique* 287, 781-788 (1985).

6. P. Pierson and J. Padet, Simulation of a solar collector operating in unsteady state, ISES Solar World Congress, Hamburg (1987).
7. J. H. Balbi, N. Balbi, P. Orenge et G. Simonot, Modélisation du champ de capteurs de la centrale solaire de Vignola, *Revue Phys. Appliquée* 21, 169-180 (1986).
8. A. Lefevre et A. Degiovanni, Un modèle non linéaire de capteur solaire plan à air en convection naturelle ou forcée, *Revue Gén. Thermique* (à paraître).
9. J. F. Sacadura, Initiation aux transferts thermiques, *Tech. Documentation* (1978).
10. B. Pierre, Dimensionnement des échangeurs de chaleur, *Revue Gén. Thermique* 260-261, 587-615 (1983).

ANNEXE : ETUDE EN REGIME PERMANENT DES SYSTEMES {Se} et {Se'} DEFINIS AU PARAGRAPHE 4.1.2

Etude du système {Se}

Le système étudié est celui de la Fig. 5 où l'on considère un flux nul au niveau de la paroi a et une densité de flux  $\phi$  constante au niveau de la paroi i. Par une double intégration de l'équation de Navier-Stokes appliquée au fluide F, on a :

$$U_F(r) = \frac{2U_{dF}}{\frac{r_3^2 - r_2^2}{\ln(r_3/r_2)} - (r_3^2 + r_2^2)} \times \left( r^2 - r_3^2 - (r_3^2 - r_2^2) \frac{\ln(r/r_3)}{\ln(r_3/r_2)} \right). \quad (A1)$$

Par ailleurs, si l'on admet l'affinité des profils de température :

$$T_F(x, r) = T_{F0}(x) + T_{F1}(r) \quad (A2)$$

et si on intègre par rapport à  $r$  le bilan d'énergie local du fluide F, on obtient à l'aide de (A1) :

$$T_F(x, r) = T_i(x) + \frac{G_1(r)}{G_2} (T_a(x) - T_i(x))$$

avec

$$G_1(r) = \frac{3r_2^4}{16} - \frac{r_3^2 r^2}{4} + \frac{r^4}{16} - \frac{(r_3^2 - r_2^2)}{4 \ln(r_3/r_2)} \times \left[ r^2 \ln\left(\frac{r}{r_3}\right) + (r_2^2 - r^2) + b \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) \right]$$

$$G_2 = b \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{(r_3^2 - r_2^2)}{4 \ln(r_3/r_2)} - \frac{3}{16} (r_3^4 - r_2^4)$$

$$b = \frac{r_3^4}{4} - \frac{(r_3^2 - r_2^2)r_3^2}{4 \ln(r_3/r_2)} \quad (\text{A3})$$

On en déduit :

$$\bar{T}_F = \frac{1}{V_C} \int_L \left[ \int_{A_{df}} T_F(r, x) dA_{df} \right] dx = \bar{T}_i + G_3 (\bar{T}_a - \bar{T}_i)$$

avec

$$G_3 = \frac{2}{G_2(r_3^2 - r_2^2)} \left[ \frac{5}{32} \left( r_2^4 r_3^2 - \frac{r_3^6 + 2r_2^6}{3} \right) + \frac{b}{3} \left( r_3^2 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) - \frac{r_3^2 - r_2^2}{2} - \frac{r_3^2 - r_2^2}{16 \ln(r_3/r_2)} \right) \times \left( r_2^4 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + 2r_2^2 r_3^2 - \frac{5}{4} r_3^4 - \frac{3}{4} r_2^4 \right) \right] \quad (\text{A4})$$

Le coefficient moyen d'échange  $\bar{h}_{iF}$  par convection entre la paroi  $i$  et le fluide F se déduit de (A4) par :

$$\bar{h}_{iF} = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{T}_i - \bar{T}_F} = \bar{\lambda}_F / (G_2 G_3 G_4)$$

avec

$$G_4 = 4r_2 / [(r_3^4 - r_2^4) - (r_3^2 - r_2^2)^2 / \ln(r_3/r_2)] \quad (\text{A5})$$

*Etude du système {Se'}*

On procède comme précédemment et on obtient :

$$U_C(r) = 2U_{dc}(1 - r^2/r_1^2)$$

$$T_C(r, x) = T_i(x) + \frac{\bar{\varphi}}{\lambda_C r_1} \left( \frac{3}{4} r_1^2 - r^2 + \frac{r^4}{4r_1^2} \right)$$

$$\bar{h}_{c1} = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{T}_C - \bar{T}_i} = 3\bar{\lambda}_C / r_1 \quad (\text{A6})$$

## THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF HEAT EXCHANGERS OPERATING IN UNSTEADY STATE. SIMULATION OF THE RESPONSE TO A STEP FUNCTION

**Abstract**—The response of a heat exchanger to a step function realized on a fluid inlet temperature is studied. A theoretical model is proposed, based on experimental observations which show that, after a short delay, the response can easily be simulated with an exponential law, characterized by only one time constant  $\tau$ . The heat balance of the heat exchanger elements leads to a simple and analytical expression of  $\tau$ , which is a function of the elements' characteristics (geometry, materials, ...) and the working conditions. The expression obtained has been checked through experiments (concentric pipe heat exchanger) and the results of other authors.

## THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN AN WÄRMEAUSTAUSCHERN IM INSTATIONÄREN BETRIEB: SIMULATION EINER SPRUNGANTWORT

**Zusammenfassung**—Das Antwortverhalten eines Wärmeaustauschers auf eine sprungartige Änderung der Eintrittstemperatur wird untersucht. Es wird ein Berechnungsverfahren vorgeschlagen, welches auf experimentellen Untersuchungen basiert, die zeigen, daß das Antwortverhalten nach einer kurzen Verzögerung durch eine Exponentialfunktion mit nur einer Zeitkonstanten dargestellt werden kann. Die Energiebilanz an den Wärmeaustauscher-Elementen führt zu einem einfachen analytischen Ausdruck von  $\tau$ , welcher eine Funktion der Element-Charakteristiken (Geometrie, Materialien) und der Betriebsbedingungen ist. Der ermittelte Ausdruck wurde durch Experimente (Doppelrohr-Wärmeaustauscher) sowie durch Meßergebnisse anderer Autoren überprüft.

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ТЕПЛООБМЕННИКОВ, РАБОТАЮЩИХ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКЛИКА НА ВНЕЗАПНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

**Аннотация**—Изучается отклик теплообменника на ступенчатое изменение температуры жидкости на входе. Предложена теоретическая модель, основанная на экспериментальных наблюдениях, которые показывают, что после короткой задержки, отклик может быть легко смоделирован с помощью экспоненциального закона, характеризующегося только одной постоянной времени  $\tau$ . Тепловой баланс элементов теплообменника приводит к простому и аналитическому выражению для  $\tau$ , которое является функцией характеристик элементов (геометрия, материалы и т.д.) и рабочих условий. Полученное выражение было проверено экспериментально (теплообменник с концентрическими трубами) и по результатам других исследователей.